

## Contrôle Intermédiaire : correction.

---

### Partie I (à rédiger sur une première copie)

#### Exercice 1 [4 points]

1. Définissez la convergence uniforme d'une **suite** de fonctions  $(f_n)_n$  définie sur un domaine  $D$  vers une fonction  $f$ .
2. Est-ce que la suite donnée pour  $n \geq 1$  par :

$$f_n(x) = \cos(nx)/\ln(1 + nx), \quad x \in ]0, 1]$$

converge simplement ? Si oui, donner la limite.

3. Cette même suite converge-t-elle uniformément ?

**Correction Exercice 1** 1. La borne supérieure de  $|f - f_n|$  sur  $D$  tend vers 0.

2. Pour chaque  $x$  dans  $]0, 1]$ , le numérateur reste borné et le dénominateur tend vers l'infini. On a donc convergence **simple** vers la fonction  $f$  identiquement nulle.
3. Cette convergence n'est pas uniforme : on pose  $x_n = 1/n$  et on voit que  $f_n(x_n) - f(x_n) = \cos(1)/\ln(2)$  donc ne tend pas vers 0.

**Exercice 2** [6 points] Pour les **séries** de fonctions données par le terme général suivant pour  $n \geq 1$ , dites si elles convergent simplement ? uniformément ? normalement ?

1.  $a_n(x) = \sin(nx)/n^2x^2, \quad x \in ]0, 1]$ .
2.  $b_n(x) = \sin(n^2x)/n^2, \quad x \in [0, +\infty[$ .
3.  $c_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}, \quad x \in ]0, 1]$ .
4.  $d_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}, \quad x \in [1, 2]$ .

**Correction Exercice 2** 1. On a convergence simple car à  $x$  fixé on a :

$$|a_n| \leq x^{-2}/n^2$$

et on peut comparer avec la série de Riemann ( $2 > 1$ ). On n'a pas de convergence uniforme (et donc pas de convergence normale) car en posant  $x_n = 1/n$  on a  $a_n(x_n)$  qui ne tend pas vers 0.

2. On a convergence normale (donc les 2 autres) car pour  $n \geq 1, \|b_n\|_\infty \leq 1/n^2$  et on peut comparer avec la série de Riemann ( $2 > 1$ ).
3. On a convergence simple et pas de convergence uniforme (et donc pas de convergence normale) pour la même raison que pour  $a_n$ . En effet à  $x$  fixé on a :

$$|c_n| \leq x^{-2}/n^2$$

et d'autre part en posant  $x_n = 1/n$  on a  $c_n(x_n)$  qui ne tend pas vers 0.

4. On a convergence normale pour la même raison que pour  $b_n$  car pour  $n \geq 1, \|d_n\|_\infty \leq 1/n^2$ .

## Partie II (à rédiger sur une deuxième copie)

**Exercice 3** [3 points] Calculer les limites suivantes :

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) e^{-x}.$$

**Correction Exercice 3** 1. Par un développement limité bien connu (on a le droit de les ajouter !), le numérateur vaut :  $-x^3/6 + o(x^3)$ . La limite demandée vaut donc  $-1/6$ .

2. L'exponentielle tend vers 1 : il suffit donc de regarder  $x \ln(x)$ . En faisant le changement de variable  $y = 1/x$ , on se ramène à  $-\ln y/y$ . Cette limite vaut 0 quand  $y$  tend vers l'infini. La limite demandée vaut donc 0.

**Exercice 4** [3 points] Dire si les **suites numériques** données par le terme général suivant ( $n \geq 1$ ) convergent. Si oui, donner la limite.

1.  $a_n = \cos(\pi n^2)$ .

2.  $b_n = 2n(1 - \cos(1/\sqrt{n}))$ .

3.  $c_n = (1 + \frac{1}{n})^{2n}$ .

**Correction Exercice 4** 1. La suite diverge : elle vaut  $-1$  si  $n$  est impair et  $1$  si  $n$  est pair.

2. On fait un développement limité :  $1/\sqrt{n}$  tend bien vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Cela donne :

$$b_n = 2n(1 - 1 + (1/\sqrt{n})^2/2 + o((1/\sqrt{n})^2)) = 1 + o(1).$$

La suite tend donc vers 1.

3. On reconnaît le carré de la suite bien connue :

$$(1 + 1/n)^n = e^{n \ln(1+1/n)} = e^{n(1/n + o(1/n))} = e^{1+o(1)}.$$

La suite tend donc vers  $e^2$ .

**Exercice 5** [4 points] Dire si les **séries numériques** données par le terme général suivant ( $n \geq 1$ ) convergent.

1.  $u_n = \sin(\sin(1/n))$ .

2.  $v_n = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$ .

**Correction Exercice 5** 1.  $u_n$  est équivalent à  $\sin(1/n)$  donc à  $1/n$ . Il s'agit du terme général d'une série de Riemann qui diverge (et est positive). Par conséquent la série de terme général  $u_n$  diverge.

2. Soit  $w_n = 1/(n+1)^{3/2}$ . Il s'agit du terme général d'une série de Riemann qui converge car  $3/2 > 1$ .

On a :

$$u_n/w_n = \ln(n+1)/(n+1)^{1/2} \rightarrow 0.$$

Par comparaison avec la série convergente à termes positifs  $w_n$ , on conclut que la série de terme général  $u_n$  converge.